考研论坛----考研人的精神家园

浙江大学

线性代数

第一部分 矩阵 | 基础知识

矩阵等价

∃可逆C，满足

$A = C^{-1}BC$

1、线性方程组与矩阵

① 线性方程组等价：两个线性方程组有相同的解集。

② 方阵
- 上三角矩阵
- 下三角矩阵
- 对角矩阵 $diag(d_1, d_2, \cdots d_n)$

注：只有方阵才有行列式的。

2、方阵的行列式

① 注意：“代数余子式”和“余子式”的区别 ⇒ “代数”的实质就是正负号。

如果连两者的定义都忘记了，请认真研究行列式的定义。☺

例：求矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 的第三列代数余子式之和。

解：$A_{13} + A_{23} + A_{33}$

$= 1 \times A_{13} + 1 \times A_{23} + 1 \times A_{33}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

例：求矩阵 $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的第2列各元素余子式之和

解：$D_{12} + D_{22} + D_{32} + D_{42}$

$= (-1) \times A_{12} + 1 \times A_{22} + (-1) \times A_{32} + 1 \times A_{42}$

$= \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -14$

bbs.kaoyan.con

考研论坛……考研人的精神家园

浙江大学

② 矩阵A经过初等变换：

$$\begin{cases} A\times R_{ij}: & |A| \Rightarrow -|A| \\ A\times R_{ij}(k): & |A| \Rightarrow |A| \\ A\times R_i(\lambda): & |A| \Rightarrow \lambda|A| \end{cases}$$

注：右乘是列变换，左乘是行变换。

③ 矩阵 $G=\begin{bmatrix} 0 & & g_1 \\ & g_2 & \\ g_n & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ 的行列式 $|G|=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{i=1}^{n} g_i$

④ 例：

$$\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & a+(n-1)b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b]\times\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b]\times\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & a-b \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b]\times(a-b)^{n-1}$$

$$= (a-b)^n\times\left(1+\frac{b}{a-b}\times n\right)$$

} 2个结论，最好记住

加边法举例：

例：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b & \cdots & b \\ b & a_2 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a_n \end{vmatrix} \xlongequal{\text{加边}} \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a_1 & b & \cdots & b \\ 0 & b & a_2 & \cdots & b \\ 0 & b & b & \ddots & a_n \end{vmatrix} \xlongequal[\text{第一行}]{\text{各行减去}} \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ -1 & a_1-b & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{各列}\times\frac{1}{a_i-b}\text{加到第一列上}} \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{b}{a_i-b} & b & b & \cdots & b \\ 0 & a_1-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(a_i-b)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{b}{a_i-b}\right)$$

bbs.kaoyan.com

考研论坛 · 考研人的精神家园

浙江大学

用同样的方法，可以计算下面两个行列式：

$$\begin{vmatrix} a_1+b & b & \cdots & b \\ b & a_2+b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a_n+b \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{b}{a_i}\right)$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i-a_i}\right)$$

大家可以通过上面的4个例子总结规律，相当实用.

⑤ 子行列式：并不是只有方阵才有子行列式.

$A_{m\times n}$，A的任一子方阵的行列式都是子行列式.（子式）

⑥ $|A^T|=|A|$

$R(A^T)=R(A)=R(AA^T)=R(A^TA)$

注意：第二个式子中后面两个"="只有在A为方阵时才成立.

回忆：$\begin{cases} R(AB)\le \min\{R(A),R(B)\} \\ R(AB)\geqslant R(A)+R(B)-n \end{cases}$ 　注意这个n：$A_{mn}\cdot B_{nk}$

此时令 $B=A^T$ 即可得出 $R(A)\le R(AA^T)=R(A^TA)\le R(A)$ 且 $R(A)=R(A^T)$

$\Longrightarrow$ $R(A^T)=R(A)=R(AA^T)=R(A^TA)$

⑦ 矩阵的行秩与列秩相同

⑧ 求矩阵的秩：

初等变换 ⇒ 把行向量组变为一个与之等价的向量组.

这是因为. 等价的向量组有相同的秩.

bbs.kaoyan.con

考研论坛----考研人的精神家园

⑨ A.B为n阶方阵. AB为退化的 ⟺ A.B至少有一个为退化的.

⑩ 奇数阶反对称行列式值为0.

反对称: $A=-A^T$, 设A为n阶方阵. n为奇数.

两边取行列式 $|A|=(-1)^n|A^T|=-|A^T|$

又 $|A|=|A^T|$

故 $|A|=0$ (反对称矩阵主对角元素全为0)

⑪ 范德蒙行列式:

格式: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$ ← 第一行全为1. ← n-1阶

应用: 求 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$ 的值.

解: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix} = (x-d)(x-c)(x-b)(x-a)(d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b$

原行列式为上式中 $(-1)\cdot x^3$ 的系数 $=(a+b+c+d)(d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a)$

3. 矩阵代数

① $AB=0$ 但A.B都不一定为0;

$AC=A$. 但C并不一定为E. A也不一定为0.

② 初等矩阵的概念: 单位矩阵经一次初等变换所得到的矩阵.

R_{ij}, $R_i(\lambda)$, $R_{ij}(k)$; C_{ij}, $C_i(\lambda)$, $C_{ij}(k)$

bbs.kaoyan.con

考研论坛----考研人的精神家园

③ 三类初等矩阵的性质如下:

$(R_{ij})^T = R_{ij}$ $(R_{ij})^{-1} = R_{ij}$ $|R_{ij}| = -1$

$[R_i(\lambda)]^T = R_i(\lambda)$ $[R_i(\lambda)]^{-1} = R_i(\frac{1}{\lambda})$ $|R_i(\lambda)| = \lambda$

$[R_{ij}(k)]^T = R_{ji}(k)$ $[R_{ij}(k)]^{-1} = R_{ij}(-k)$ $|R_{ij}(k)| = 1$

$R_{ij} = C_{ij}$ $[R_{ij}(k)]^T = R_{ji}(k) = C_{ij}(k)$ $R_i(\lambda) = C_i(\lambda)$

④ $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$

⑤ 理解: 转置伴随矩阵的来源: 是代数余子式的转置组成的.

$AA^* = A^*A = E \cdot |A|$

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$; $A^* = A^{-1}|A|$; $|A| = \frac{1}{|A^{-1}|}$; $|A^*| = |A|^{n-1}$

⑥ $(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$

其实, $A+B = A(A^{-1}+B^{-1})B = B(A^{-1}+B^{-1})A$

故 $(A+B)^{-1} = B^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1} = A^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}B^{-1}$

特别地, 若 A. B 均为正交阵($AA^T = E \Rightarrow A^T = A^{-1}$; 同理 $B^T = B^{-1}$)

有, $A+B = A(A^T+B^T)B = B(A^T+B^T)A$

⑦ 解方程 $AX=B$ 的方法.

~~方法一~~ $[A, B] \xrightarrow[A^{-1}A=E,\ A^{-1}B=X]{\text{行初等变换,(左乘)}} [E, X]$

~~方法二~~ 解方程 $XA=B$ 的方法.

$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \xrightarrow[AA^{-1}=E,\ BA^{-1}=X]{\text{列初等变换.(右乘)}} \begin{bmatrix} E \\ X \end{bmatrix}$

⑧ $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$, $\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & D \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$

bbs.kaoyan.con

浙江大学

$$\begin{vmatrix} 0 & A_{m\times n} \\ B_{n\times m} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_{n\times m} & A_{m\times n} \\ B_{m\times m} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & A_{m\times n} \\ B_{n\times m} & D_{m\times n} \end{vmatrix} = (-1)^{m\cdot n}|A||B|$$

⑨. $R\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = R(A)+R(B)$；

$R\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix} \geq R(A)+R(B)$，

⑩ 任一n阶矩阵A都可表示成一个对称阵与一个反对称阵之和.

$$A = \frac{1}{2}(A+A^T) + \frac{1}{2}(A-A^T)$$

⑪ 若B为1矩阵（元素全为1的矩阵），则 $B^2 = nB$

⑫ 若 $a_{ij} = A_{ij} \Longrightarrow \begin{cases} |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \text{（i固定，即按某行展开）若}A\neq 0\text{，则}|A|>0 \\ \text{adj}\,A = A^T \end{cases}$

第一部分：矩阵	例题分析.

1.
$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} a_{11}b^{1-1} & a_{12}b^{1-2} & \cdots & a_{1n}b^{1-n} \\ a_{21}b^{2-1} & a_{22}b^{2-2} & \cdots & a_{2n}b^{2-n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1}b^{n-1} & a_{n2}b^{n-2} & \cdots & a_{nn}b^{n-n} \end{vmatrix}$$

求证：$A = B$.

分析：将B的第j列 $\times b^j$ $(1\leq j\leq n)$ 得

$$B = \frac{1}{b^{1+2+\cdots+n}} \times b^1\cdot b^2\cdot b^3\cdots b^n A = A.$$

2、若 $a>b>c>0$，计算 $D_3 = \begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ac \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix}$

解：$D_3 = \begin{vmatrix} a & a^2 & ab+a^2+ac+bc \\ b & b^2 & ab+b^2+bc+ac \\ c & c^2 & ac+bc+c^2+ab \end{vmatrix}$（第一列乘以a.b.c加到第三列得到的）

考研论坛----考研人的精神家园

浙江大学

拆分 $\begin{vmatrix} a & a^2 & a^2 \\ b & b^2 & b^2 \\ c & c^2 & c^2 \end{vmatrix} + (ab+ac+bc)\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix}$

$= 0 + (ab+ac+bc)(c-a)(c-b)(b-a)$

3. 有以下不证明定理:

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ 的 n 个解: $x_1\ x_2 \cdots x_n$.

有 $\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}$ 成立

若 a, b, c 是 $x^3 + px + q = 0$ 的三个根 ($\Rightarrow a+b+c = -\frac{0}{1} = 0$)

则 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} = 0$

4. 矩阵拆分的应用.

① $D = \begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & & 1+x_n^n \end{vmatrix} \xlongequal{加边} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1 & 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 2-1 & 0-1 & 0-1 & 0-1 \\ 1 & & & \\ 1 & & \text{范德蒙}\ n & \\ 1 & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & & & \\ 1 & & \text{范德蒙}\ n & \\ 1 & & & \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots 1 \\ 1 & & & \\ 1 & & \text{范德蒙}\ n & \\ \vdots & & & \\ 1 & & & \end{vmatrix}$

$= 2 \times \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j) - \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j) \cdot \prod_{i=1}^{n} (x_i - 1)$

② $D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ b & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1-b+b & a & \cdots & a \\ 0+b & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \\ 0+b & b & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1-b & a & \cdots & a \\ 0 & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & b & \cdots & x_n \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & b & \cdots & x_n \end{vmatrix}$

(左下都是b, 右上都是a)

bbs. kaoyan. con

浙江大學

$$=(x_1-b)D_{n-1}+b\times\begin{vmatrix}1 & a & \cdots & a\\ 0 & x_2-a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & b-a & \cdots & x_n-a\end{vmatrix}$$ （⇐全部减去第一行）

$$=(x_1-b)D_{n-1}+b\times(x_2-a)(x_3-a)\cdots(x_n-a)$$

对称地 $D_n=(x_1-a)D_{n-1}+a\times(x_2-b)(x_3-b)\cdots(x_n-b)$

将其中一个 D_{n-1} 代入另一式中得

$$D_n=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{x_i-a}\right) & a=b\text{时（与基础知识部分④一致）}\\ \frac{a\cdot\prod_{i=1}^{n}(x_i-b)-b\cdot\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)}{a-b} & a\neq b\text{时.}\end{cases}$$

5、设 $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ 都是三维向量，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\ \alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$，

若 $|A|=1$，则有 $|B|=$ __2__；

解利用矩阵变换

$$|B|=|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_2+3\alpha_3,\ 2\alpha_2+8\alpha_3|=|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_2+3\alpha_3,\ 2\alpha_3|$$

$$=2|\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2,\ \alpha_3|=2|\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3|=2\times1=2$$

6、若3阶行列式 $|A|=2$，则

$$\begin{vmatrix}3a_{31} & 2a_{21} & -a_{11}\\ 3a_{32} & 2a_{22} & -a_{12}\\ 3a_{33} & 2a_{23} & -a_{13}\end{vmatrix}=-6\times\begin{vmatrix}a_{31} & a_{21} & a_{11}\\ a_{32} & a_{22} & a_{12}\\ a_{33} & a_{23} & a_{13}\end{vmatrix}=-6\times(-2)=12$$

7. $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3,\ \beta_1\ \beta_2$ 都是4维列向量，$|\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \beta_1|=n$，$|\alpha_1\ \alpha_2\ \beta_2\ \alpha_3|=m$，

则 $|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,(\beta_1+\beta_2)|=|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1|+|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_2|=-n+m=m-n$

8、设 $D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n\end{vmatrix}$ 求 $A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}$ 及 $A_{11}+A_{21}+\cdots+A_{n1}$

bbs.kaoyan.com

考研论坛——考研人的精神家园

浙江大学

解：$A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}$ $\qquad$ $A_{11}+A_{21}+\cdots+A_{n1}$

$$=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\ &\cdots\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}=n!\times(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}) \qquad = \begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\ &\cdots\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}=|D_n|=n!\,(2-n)$$

9. n阶方阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1&1&\cdots&1\\ &\cdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$ 的所有代数余子式之和为：1

解：因为除第一行代数余子式之和为1以外，其余都为0.

10. $\begin{vmatrix}a&b&c\\a^2&b^2&c^2\\b+c&c+a&a+b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&b&c\\a^2&b^2&c^2\\a+b+c&c+a+b&a+b+c\end{vmatrix}=(a+b+c)(c-b)(c-a)(b-a)$

11. 已知3阶实矩阵A中，$a_{ij}=A_{ij}$，$a_{ij}\neq0$，则 $|A|=$ __1__

解：$a_{ij}=A_{ij}\Rightarrow A^T=A^*\Rightarrow |A|=|A|^{3-1}=|A|^2\Rightarrow |A|=1$ 或 $|A|=0$

$\because |A|=\sum a_{ij}\cdot A_{ij}=\sum a_{ij}^2>0 \quad \therefore |A|=1$

12. 求分块矩阵 $\begin{bmatrix}A&0\\C&B\end{bmatrix}$ 的逆，A、B可逆

解1：$\begin{pmatrix}A&0\\C&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X&Y\\Z&W\end{pmatrix}=E \Rightarrow \begin{cases}X=A^{-1},\ Y=0\\ Z=-B^{-1}CA^{-1},\ W=B^{-1}\end{cases}$

解2：$\begin{bmatrix}A&0&E&0\\C&B&0&E\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}E&0&A^{-1}&0\\C&B&0&E\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}E&0&A^{-1}&0\\B^{-1}C&E&0&B^{-1}\end{bmatrix}$

$\sim\begin{bmatrix}E&0&A^{-1}&0\\0&E&-B^{-1}CA^{-1}&B^{-1}\end{bmatrix}$

13. 设A为3阶矩阵，A的第2列加到第1列为B，再将B的第1列乘(-1)加到第2列为C，记 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 则 $C=PAP^{-1}$

bbs.kaoyan.com

考研论坛----考研人的精神家园

浙江大学

解：由题意：（左乘行变换，右乘列变换）（三类初等矩阵的性质）

$R_{21}(1)A=B$，$B\cdot C_{12}(-1)=C$

则 $C=R_{21}(1)AC_{12}(-1)=R_{21}(1)AR_{21}(-1)$

而 $P=R_{21}(1)$，故 $P^{-1}=R_{21}(-1)$ $\therefore C=PAP^{-1}$

14. 设 $|A|\neq0$，B是交换A的第i行与第j行得到的，下列不正确的为：④

① $|B|\neq0$； $\because |B|=-|A|$

② $AB^{-1}=R_{ij}$； $\because B=R_{ij}A \Rightarrow B^{-1}=A^{-1}R_{ij} \Rightarrow AB^{-1}=R_{ij}$

③ 交换 A^{-1} 的第i列与第j列得到 B^{-1}， $\because A^{-1}C_{ij}=A^{-1}R_{ij}=B^{-1}$

④ 交换 adj A 的第i列与第j列得到 adj B.

$\because A^{*}C_{ij}=A^{*}R_{ij}=|A|\cdot A^{-1}R_{ij}=|A|\cdot B^{-1}$

$B^{*}=B^{-1}\cdot|B|=-|A|\cdot B^{-1}$

$\therefore A^{*}C_{ij}=-B^{*}$ 而不是 $A^{*}C_{ij}=B^{*}$

15. A是 $m\times n$ 阵，B是 $n\times m$ 阵，则不正确的为：③

① $m>n$ 时 $|AB|=0$ ② $m<n$ 时，$|AB|=0$.

③ $m>n$ 时 $|AB|\neq0$ ④ $m<n$ 时 $|AB|\neq0$

解：$R(AB)\leq\min(R(A),R(B))$，且 $R(AB)\leq m$，$\because AB$ 为 $m\times m$ 阵

$m>n$ 时，$R(AB)\leq n$. $\therefore |AB|=0$

$m<n$ 时 $R(AB)\leq m$ $|AB|=0$ 或 $|AB|\neq0$.

16. $|A|=\frac{1}{2}$，则 $|(3A)^{-1}-2A^{*}|=|\frac{1}{3}A^{-1}-2|A|A^{-1}|=|-\frac{2}{3}A^{-1}|=(-\frac{2}{3})^{3}|A^{-1}|$

A为3×3阵.

$=-\frac{8}{27}\times2=-\frac{16}{27}$

bbs.kaoyan.con

浙江大学

17. A为非奇异（即 $|A|\neq 0$），α 为n维列向量，b为常数

$$P=\begin{bmatrix} E & 0 \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{bmatrix}$$

① 求PQ　② 证 Q可逆 $\Leftrightarrow \alpha^T A^{-1}\alpha \neq b$

解：① $PQ=\begin{bmatrix} A & \alpha \\ -\alpha^T A^* A+|A|\alpha^T & -\alpha^T A^*\alpha+|A|b \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} A & \alpha \\ -\alpha^T A^{-1}|A|A+|A|\alpha^T & -\alpha^T A^{-1}|A|\alpha+|A|b \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A & \alpha \\ 0 & |A|(b-\alpha^T A^{-1}\alpha) \end{bmatrix}$$

证② Q可逆 $\Leftrightarrow |Q|\neq 0$

而 $|PQ|=|P||Q|$ 得 $|A|\cdot|A|(b-\alpha^T A^{-1}\alpha)=|Q|\,|A|$

$\therefore |Q|=|A|(b-\alpha^T A^{-1}\alpha)$

而 $|A|\neq 0$　$\therefore |Q|\neq 0 \Leftrightarrow b-\alpha^T A^{-1}\alpha\neq 0 \Leftrightarrow \alpha^T A^{-1}\alpha\neq b$

18. $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$　$B=P^{-1}AP$，则 $B^{2008}-2A^2=\underline{3E}$

解：$B^{2008}-2A^2=P^{-1}A^{2008}P-2A^2$　(*)

$A^2=\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$　$A^4=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$　∵2008可以被4整除

$\therefore A^{2008}=E$

$\therefore$ (*) $=E+2E=3E$

19. $A_1\ A_2\ A_3$ 分别是 l m. n 阶方阵，则 $\begin{vmatrix} & & A_1 \\ & A_2 & \\ A_3 & & \end{vmatrix}=(-1)^{n(l+m)}\begin{vmatrix} & A_1 \\ A_2 & \end{vmatrix}|A_3|$

$$=(-1)^{ln+lm+mn}|A_1||A_2||A_3|$$

提示：换行

bbs kaoyan. con

浙江大学

20. A B C 都是方阵 $B=E+AB$ $C=A+CA$，则 $B-C=$ E

解：$B=E+AB \Rightarrow B(E-A)=E$
$C=A+CA \Rightarrow C(E-A)=A$ } $\Rightarrow (B-C)(E-A)=E-A \Rightarrow B-C=E$

21. 已知 $Q=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ P是3阶非0阵 $PQ=0$ 则不正确的是 ③

① $t=6$时 $r(P)=1$ ② $t\neq 6$时 $r(P)=1$
③ $t=6$时 $r(P)=2$ ④ $t\neq 6$时 $r(P)=2$

解：$\because PQ=0$. $\therefore r(P)+r(Q)\leq 3$
又 $P\neq 0$. $\therefore r(P)\geq 1$
$t=6$时 $r(Q)=1$ $\therefore 1\leq r(P)\leq 2$. $\therefore$ ① ④ √
$t\neq 6$时 $r(Q)=2$ $\therefore 1\leq r(P)\leq 1$ $\therefore r(P)=1$ $\therefore$ ② √

22. A是一个3×3阵，$|A|=3$，$A^*=A^T$，若 $a_{11}=a_{12}=a_{13}>0$，则 $a_{11}=$ 1

解：$A^*=A^T \Leftrightarrow a_{ij}=A_{ij}$
$\therefore |A|=a_{11}\times A_{11}+a_{12}\times A_{12}+a_{13}\times A_{13}=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=3a_{11}^2=3$
$\therefore a_{11}=\pm 1$ 又 $a_{11}>0$. $\therefore a_{11}=1$

23. 设 γ, β 是3维列向量，$A=\gamma\gamma^T+\beta\beta^T$，求证 ① $r(A)\leq 2$ ② 若 γ, β 线性相关 $r(A)\leq 1$

证：① $r(A)\leq r(\gamma\gamma^T)+r(\beta\beta^T)$
$\leq \min(r(\gamma), r(\gamma^T))+\min(r(\beta), r(\beta^T))\leq 1+1=2$

② 设 $\beta=k\gamma$.
则 $r(A)\leq r(\gamma\gamma^T+k^2\gamma\gamma^T)=r(\gamma\gamma^T)\leq 1$

bbs.kaoyan.con

考研论坛----考研人的精神家园

浙江大学

24 设 $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 且满足 $ABA^*=2BA^*+E$ 则 $|B|=\frac{1}{9}$

解: $ABA^*=2BA^*+E$ （$\because A^*=A^{-1}|A|$）

$\Longleftrightarrow |A|ABA^{-1}=2|A|BA^{-1}+E$ （右乘A）

$\Longleftrightarrow (3A-6E)B=A$ （两边取行列式）

$\Longleftrightarrow |3A-6E||B|=3$ （$|A-2E|=1$）

$\Longrightarrow 3^3\times|A-2E||B|=3 \Longleftrightarrow |B|=\frac{1}{9}$

25. $\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=m$ 则 $\begin{vmatrix}a_1+2b_1&a_2+2b_2&a_3+2b_3\\b_1+2c_1&b_2+2c_2&b_3+2c_3\\c_1+2a_1&c_2+2a_2&c_3+2a_3\end{vmatrix}=\underline{27m}$

解: 原式 $=\left|\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2b_1&2b_2&2b_3\\2c_1&2c_2&2c_3\\2a_1&2a_2&2a_3\end{bmatrix}\right|$

$=\left|\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}\right|=27m$

注: 此题考察 aA 与 $|aA|$ 的区别

26 两个矩阵等价 $\Longleftrightarrow$ 可以化为相同的标准形 $\begin{bmatrix}E_r&0\\0&0\end{bmatrix}$ （$r(A)=r(B)$） 充要.

$\Updownarrow$

$\exists$ 可逆 C, 使 $A=C^{-1}BC$

两个向量组等价 $\Longrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)=r(\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n)$

充分非必要

bbs kaoyan. con

考研论坛 · 考研人的精神家园

浙江大学

第二部分 | 向量 | 基础知识

1、n维向量

① 三向量 $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ 线性相关

$\Leftrightarrow r(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})<3 \Leftrightarrow |\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}|=0 \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=0 \Leftrightarrow$ 三向量共面

② 包含零向量的向量组必线性相关 ∵ 行列式肯定为0

③ $R(A)=R(AQ)$ Q可逆.

应用很广 已知 $\vec{\alpha}_1\,\vec{\alpha}_2\,\vec{\alpha}_3$ 线性相关 则 $\vec{b}_1=\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2$, $\vec{b}_2=\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3$, $\vec{b}_3=\vec{\alpha}_3+\vec{\alpha}_1$

线性相关

∵ $[\vec{b}_1\,\vec{b}_2\,\vec{b}_3]=[\vec{\alpha}_1\,\vec{\alpha}_2\,\vec{\alpha}_3]\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$

∴ 判断 $\vec{b}_1\,\vec{b}_2\,\vec{b}_3$ 是否线性相关 $\Rightarrow$ 矩阵 $\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$ 的秩 [illegible]

④ $\vec{b}$ 可否由 $\vec{\alpha}_1\,\vec{\alpha}_2\,\vec{\alpha}_3$ 线性表示的问题 $\Leftrightarrow r(A)=r(A,b)$

例:
$$\begin{bmatrix}1&1&1&\frac{1}{2}\\1&1&-1&2\\1&-1&1&\frac{1}{2}\\1&-1&-1&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{3}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$
（各列依次为 $\vec{\alpha}_1\,\vec{\alpha}_2\,\vec{\alpha}_3\,\vec{b}$）

∵ $R(\vec{\alpha}_1\,\vec{\alpha}_2\,\vec{\alpha}_3)=R(\vec{\alpha}_1\,\vec{\alpha}_2\,\vec{\alpha}_3\,\vec{b})=3$

∴ $\vec{b}$ 可以由 $\vec{\alpha}_1\,\vec{\alpha}_2\,\vec{\alpha}_3$ 线性表示 且表示方式唯一 [illegible]

$$\vec{b}=\frac{3}{2}\vec{\alpha}_1-\frac{1}{2}\vec{\alpha}_3+0\cdot\vec{\alpha}_2=\frac{3}{2}\vec{\alpha}_1-\frac{1}{2}\vec{\alpha}_3$$

⑤ 向量组的等价：两个向量组可以相互线性表示 $\Rightarrow R(A)=R(B)=R(A,B)$

⑥ 过渡矩阵的概念

向量组B可以由向量组A线性表示 $B=AC$，C为B到A的过渡矩阵

$\Updownarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\downarrow$

$R(B)\le R(A,B)=R(A)$ $\qquad$ 若C可逆 则 $R(A)=R(B)$ [illegible]

⑦ 行变换 列变换 ∴ 判断一个向量组的秩 可以将其组成的矩阵 进行行初等变换

bbs kaoyan con

考研论坛 ···考研人的精神家园

浙江大学

⑧ 向量组A和它的最大线性无关向量组等价 $\xrightarrow{\text{传递性}}$

向量组A的任两个最大线性无关向量组等价.

⑨ $\begin{cases} R(A,B) \geq \max\{R(A),R(B)\} \\ R(A+B) \leq R(A,B) \leq R(A)+R(B) \\ R(A)+R(B)-n \leq R(AB) \leq \min\{R(A),R(B)\} \end{cases}$

若 $AB=0 \Rightarrow R(A)+R(B) \leq n$

⑩ $Ax=0$的通解: $x = k_1 x^1 + k_2 x^2 + \cdots + k_s x^s$

(k_i为任意常数, $x^1 \cdots x^s$为基础解系)

区分: 通解与基础解系的概念

⑪ 一般地, A经过初等行变换和经过初等列变换可以化为标准形

$A = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 其中 $r(A)$ 为[illegible]

若 $r(A)=n$, 即A可逆, 则只用行变换即可

⑫ 求$Ax=0$的基础解系, 需将A化为$\begin{bmatrix} I_r & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$的形式

基础解系的个数为$n-r$, r为A的秩

2. 向量空间

① 向量空间的定义: 对加法和数乘封闭的向量的集合

例如: $Ax=0$的解集V就是一个向量空间

没有零向量不能构成向量空间. R^3中过原点的直线、平面都是向量空间

R^n是最大的n维向量空间, 0向量是最小的子空间 [illegible] 一些

有限个向量构成的向量空间

② $Ax=0$的解空间是由它的基础解系生成的向量空间

bbs kaoyan. con

考研论坛——考研人的精神家园

浙江大学

③向量空间的定义：要满足

<1> $a^1, a^2, \cdots a^m$ 线性无关

<2> V中任一个向量都可以由 α^1、α^2、…α^m 线性表示.

④ 向量组的维数：向量组中最大线性无关的向量个数.

向量空间的维数：向量空间的基中所包含的向量的个数

⑤ 基的变换与坐标变换

由 $a^1 a^2 \cdots a^n$ 及 $b^1 b^2 \cdots b^n$ 都是V的基，它们之间可以表示

$B = AK$，K为A到B的过渡矩阵，K可逆.

若一向量 $\vec{\alpha}$ 在A下坐标为 $\vec{x}$，在B下坐标为 $\vec{y}$，即

$\vec{\alpha} = A\cdot\vec{x} = B\cdot\vec{y}$ 则有 $\vec{x} = K\vec{y}$ 或 $\vec{y} = K^{-1}\vec{x}$

⑥ 规范正交基的格式

正交化 $b^1 = \alpha^1$，$b^2 = \alpha^2 - \frac{(\alpha^2, b^1)}{(b^1, b^1)} b^1$，$b^3 = \alpha^3 - \frac{(\alpha^3, b^1)}{(b^1, b^1)} b^1 - \frac{(\alpha^3, b^2)}{(b^2, b^2)} b^2$，… ← 施密特正交化

单位化：$\frac{b^1}{\|b^1\|}, \frac{b^2}{\|b^2\|}, \frac{b^3}{\|b^3\|} \cdots$ ← 标准化

⑦ 正交矩阵 $A = (\alpha^1 \alpha^2 \cdots \alpha^n) \Leftrightarrow \alpha^1 \alpha^2 \cdots \alpha^n$ 为 R^n 的规范正交基

$A\cdot A^T = A^T\cdot A = E$

⑧ 若两个向量组等价（即可以互相线性表示），则它们的向量空间相等

⑨ 正交矩阵：$A\cdot A^T = A^T A = E$

<1> $|A|^2 = 1$，$|A| = \pm 1$

<2> $A = (\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_n)$，$\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 是 R^n 的标准正交基

<3> A^K, A^{-1}, A^* 也是正交的

<4> A, B 正交 ⇒ AB 也正交

<5> 两个标准正交基间的过渡矩阵是正交矩阵

bbs kaoyan. con

浙江大学

第二部分 向量 例题分析

1. 设 $\alpha_1=(1,4,0,2)^T$, $\alpha_2=(2,7,1,3)^T$, $\alpha_3=(0,1,-1,2)^T$, $\beta=(3,10,a,4)^T$

a 取何值，β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示

解1：令 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$

即 $\begin{cases} x_1+2x_2=3 \\ 4x_1+7x_2+x_3=10 \\ x_2-x_3=a \\ 2x_1+3x_2+2x_3=4 \end{cases}$ 求方程组有解（非齐次方程组有解[illegible]）

而 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \end{bmatrix}$

可见，当 $a=2$ 时 $R(A)=R(A\ B)$ 方程有解

解2：β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示 $\Leftrightarrow R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)$ $\Leftrightarrow$

$\because \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关 $\therefore R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$ $\therefore |\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \beta|=0 \Rightarrow a=2$

2. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，

则 ① $\alpha_1,\ \alpha_1+\alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 的相关性 $(s=2k)$

与 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$ 有关 [illegible] 无关 [illegible]

② $\alpha_1-\alpha_2,\ \alpha_2-\alpha_3,\ \cdots,\ \alpha_n-\alpha_1$ 的相关性

与 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & -1 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 有关 此时行列式为0 故上述向量组线性相关

③ $\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2+\alpha_3,\ \cdots,\ \alpha_n+\alpha_1$ 的相关性

与 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1+(-1)^{1+n}$ 有关 $\to \begin{cases} 0 & n\text{为偶数，相关} \\ 2 & n\text{为奇数，无关} \end{cases}$

bbs kaoyan. con

考研论坛 · 考研人的精神家园

浙江大学

3. 已知 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 线性相关，$\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ 线性无关

问：① α_1 能否由 $\alpha_2\alpha_3$ 线性表示　② α_4 能否由 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 线性表示

解：① $\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ 无关 $\Rightarrow$ $\alpha_2\alpha_3$ 无关
$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 相关 } $\Rightarrow$ α_1 可以由 $\alpha_2\alpha_3$ 线性表示，且表示方式唯一

② 设 $\alpha_1=k_1\alpha_2+k_2\alpha_3$

若 α_4 能由 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 线性表示，设为

$$\alpha_4=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3$$
$$=l_1k_1\alpha_2+l_1k_2\alpha_3+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3$$
$$=(l_1k_1+l_2)\alpha_2+(l_1k_2+l_3)\alpha_3$$

即 α_4 可以由 $\alpha_2\alpha_3$ 线性表示　与题设矛盾　故 α_4 不能由 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 线性表示

4. $A_{n\times m}$，$B_{m\times n}$，$AB=E$，证 B 的列向量无关

证：$r(AB)=r(E)=n\le\min\{r(A),r(B)\}$

∴ $r(B)\ge n$
又 B 为 $m\times n$ 阵 ∴ $r(B)\le n$ } $\Rightarrow$ $r(B)=n$　即列向量无关

5　$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ 都是 n 维列向量，$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 线性无关，非0 α_4 与 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 正交

证：$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ 线性无关　　$\alpha\perp\beta$ 正交 $\Leftrightarrow$ $\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=0$

考察线性无关的概念

证：若 ∃ $k_1k_2k_3k_4$ 满足

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=0$ (※)，左乘 α_4^T 得

$$\alpha_4^T(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4)$$
$$=k_1\alpha_4^T\alpha_1+k_2\alpha_4^T\alpha_2+k_3\alpha_4^T\alpha_3+k_4\alpha_4^T\alpha_4$$
$$=k_4\alpha_4^T\alpha_4=k_4\|\alpha_4\|^2=0$$

∵ α_4 非0　∴ $k_4=0$　代入(※)得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$

又 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 无关 $\Rightarrow$ $k_1=k_2=k_3=k_4=0$，即 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ 无关

bbs kaoyan. con

考研论坛··· 考研人的精神家园

浙江大学

6 求 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5$ 的最大线性无关向量组，并将其它向量用其表示.

解：
$$\begin{array}{c} \quad \alpha_1 \;\; \alpha_2 \;\; \alpha_3 \;\; \alpha_4 \;\; \alpha_5 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & -2 & 9 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

取 $\alpha_1\alpha_2\alpha_4$ 为最大线性无关向量组

则 $\begin{cases} \alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ \alpha_5 = \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_4 \end{cases}$

【考察】 最大线性无关向量组的定义和实质、矩阵的行变换

7. $\text{I} = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$, $\text{II} = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$, $\text{III} = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_5)$

$r(\text{I}) = r(\text{II}) = 3$，$r(\text{III}) = 4$ 证 $\alpha_5 - \alpha_4$ 与 $\alpha_1, \alpha_2\ \alpha_3$ 线性无关

证1：反证

~~∵ $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ 相关 无关~~

若 $\alpha_5 - \alpha_4$ 可以由 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 线性表示，即 ∃ $k_1\ k_2\ k_3$ 满足

$\alpha_5 - \alpha_4 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 \quad (*)$

∵ $r(\text{I}) = 3 \Rightarrow \alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 无关

$r(\text{II}) = 3 \Rightarrow \alpha_4$ 可以由 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 表示且唯一 设 $\alpha_4 = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3$

代入 $(*)$ 得

$\alpha_5 = (k_1 + l_1)\alpha_1 + (k_2 + l_2)\alpha_2 + (k_3 + l_3)\alpha_3$

即 α_5 可以由 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 线性表示，这与 $r(\text{III}) = 4$ 矛盾 故假设错误 得证

证2：直证

设 $k_1(\alpha_5 - \alpha_4) + k_2\alpha_1 + k_3\alpha_2 + k_4\alpha_3 = 0$

再设 $\alpha_4 = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3$ ⟹ 整理得

$k_1\alpha_5 + (k_2 - k_1l_1)\alpha_1 + (k_3 - k_1l_2)\alpha_2 + (k_4 - k_1l_3)\alpha_3 = 0$

bbs kaoyan.con

浙江大学

解得 $\begin{cases} k_1=0 \\ k_2-k_1l_1=0 \\ k_3-k_1l_2=0 \\ k_4-k_1l_3=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} k_1=0 \\ k_2=0 \\ k_3=0 \\ k_4=0 \end{cases}$ ∴无关

证(3)：只要证 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5)=4$

即证 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4)$ 与 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5)$ 等价

∵ $\alpha_4=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3$

∴ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$ [illegible]

故等价

[考查]：线性无关的定义 [illegible]

9. $\beta_1=(1,a_1,0,0)^T$，$\beta_2=(1,a_2,2,0)^T$，$\beta_3=(1,a_3,2,3)^T$，β_4 [illegible]

[illegible]

① $\beta_1\beta_2\beta_3$ [illegible] ② [illegible] ③ [illegible] 相关 ④ $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$ 无关

解 $(\beta_1,\beta_4)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ∵ $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}\neq 0$ ∴ $r(\beta_1,\beta_4)=2$，∴无关 ②×

$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ∵ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}\neq 0$ [illegible] 无关 ③√ ①×

$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ $a_1=a_2=a_3=a_4$ 时 [illegible] 相关

$a_1a_2a_3a_4$ 为其他值，秩可能为4，无关 ④×

[考查] 线性无关与方程组的关系，[illegible]

bbs kaoyan. con

考研论坛----考研人的精神家园

浙江大学

10 设 $A_{m\times n}$ $r(A)=m<n$，E_m 为 m 阶单位阵，正确的是（3）

① A的任何m个列向量无关

对于 [m×n] 形状的矩阵 $m<n$ 只有 n 个列向量无关 故 ×

② A的任一个m阶子式都不为0

[illegible] 故 ×

③ 若 B 满足 $BA=0$，则 B 一定是 0 矩阵

$r(A)+r(B)\leq m$ $\therefore r(B)\leq 0$ 故 √

④ [illegible]

[illegible] 故 ×

11 $\xi_1=(1,0,2)^T$，$\xi_2=(0,1,-1)^T$ 都是 $Ax=0$ 的解 A=？

① $A=(-2,1,1)$ ② [illegible] ③ [illegible] ④ $A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\4&-2&2\\0&1&1\end{pmatrix}$

解：∵ ξ_1,ξ_2 线性无关 故 $r(A)=1$

[考点] 方程 $Ax=0$ 的基础解系的个数为 $n-r(A)$ 的关系（相加 n）

12. β_1,β_2 是 $Ax=b$ 的不同解 α_1,α_2 是 $Ax=0$ 的基础解系，则 $Ax=b$ 的通解

① $\frac{\beta_1-\beta_2}{2}+k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)$ ② $\frac{\beta_1+\beta_2}{2}+k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)$

③ $\frac{\beta_1-\beta_2}{2}+k_1\alpha_1+k_2(\beta_1+\beta_2)$ ④ $\frac{\beta_1+\beta_2}{2}+k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)$

解：首先 $\frac{\beta_1+\beta_2}{2}$ 是特解 其次 α_1,α_2 无关 $\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2$ 也无关（$\begin{vmatrix}1&1\\0&-1\end{vmatrix}\neq 0$）

对于④，$\beta_1-\beta_2$ 与 α_1 不一定无关

[考点] 已知一组向量线性无关，如何判断另一组是否无关

bbs kaoyan. con

考研论坛····考研人的精神家园

13. A 4×5. A行向量无关 则错误的是　　A为 $\overset{5}{\square}$ 4 形状的矩阵

① $A^Tx=0$ 只有0解

$r(A^T)=4$　$r(A^T)=4$　列满秩 只有0解 ✓

② $A^TAx=0$ 有无穷解

$r(A)=r(A^T)=r(A^TA)=4$.　A^TA为5×5. ∴有无穷解 ✓

③ ∀b. $A^Tx=b$有唯一解

∵ ① A^T列满秩　　形状 ×

④ ∀b　Ax=b有无穷解

A 4×5. (Ab) 4×6　$r(A)=r(A,b)=4$. 有无穷解

考察：矩阵的秩与方程的解的关系

Ax=0　$r(A)=n$　只有0解

$r(A)<n$　有非0解

Ax=b　$r(A)=r(A,b)=n$. 有唯一解

$r(A)=r(A,b)<n$　有无穷解

列秩与行秩的等价性

Ax=0只有0解 则 Ax=b有 唯一解

Ax=b无解

bbs kaoyan. con

考研论坛·····考研人的精神家园

③ $Ax=b$ 有唯一解. $\Leftrightarrow r(A)=n$

错误. $Ax=b$ 有唯一解 $\Rightarrow r(A)=r(B)=n$

但反之不成立. 见①

④ $m<n$. $Ax=b$ 有无穷解

错误. $m<n$. A为 $\underset{m}{\overset{n}{\square}}$ 形状矩阵,

[illegible]

[illegible]

[illegible]

① [illegible] β 可以由 $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ 唯一表示

② [illegible] β 可以由 $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ 无穷表示

[illegible]

$|\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3| = a(a-b)$ ∴ $r(A)\leq 3$

$a\neq 0$ 且 $a\neq b$ 时. $r(A)=r(B)=3$, 可以唯一表示

[illegible]

$a=b$ $r(A)=r(B)<3$ 可以无穷表示

16. $\begin{cases} x_1+\lambda x_2+\mu x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=0 \\ 3x_1+(2+\lambda)x_2+(4+\mu)x_3+4x_4=1 \end{cases}$ $(1,-1,1,-1)^T$ 是其中一 [illegible]

[illegible]

[illegible]

$\begin{matrix} 1 & & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2(2\lambda-1) & 2\lambda-1 & 2\lambda-1 \end{matrix}$

bbs kaoyan. con

浙江大学

bbs kaoyan. con

浙江大学

8

① $|A| = (n+1)a^n$ ② a为何值 $Ax=b$有唯一解 ③

解 ①归纳法

考研论坛----考研人的精神家园

浙江大学

$AX=\lambda X$

量 特征子空间 —— 特征向量 || 0向量

③ $|A-\lambda I|$ 的多项式叫特征多项式

$|A-\lambda I|=0$ 叫特征方程

④ 对于某一个特征值 λ_0，求解方程 $(A-\lambda_0 I)x=0$ 的所有基础解系

$x^1, x^2, \ldots x^{n-r}$ $(r(A-\lambda_0 I)=r)$

这基础解系所有的线性组合，$k_1x^1+k_2x^2+\ldots+k_{n-r}x^{n-r}$（$k_i$ 为任意常数）

是 $(A-\lambda_0 I)x=0$ 的通解

bbs.kaoyan.com

考研论坛 -- 考研人的精神家园

浙江大学

该基础解系的所有非零线性组合 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$ ($k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 不全为0)

是A属于特征值 λ_0 的全部[特征向量]

[注意]. 若求 λ_0 的特征子空间则没有 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 不全为0这一要求

④ $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|$, $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=tr(A)$

⑤ A与 A^T 有相同的特征值

⑥ 若 $r(A)=1$, 则A的特征值是 $\lambda_1=\sum a_{ii}$, $\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$

例如 $A=\begin{bmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{bmatrix}$ ∴ $\lambda_1=6$ $\lambda_{2,3}=0$

⑦ [相似]: $P^{-1}AP=B$ P可逆
[合同]: $P^{T}AP=B$ P可逆 } 两者都是等价 等价 $\Leftrightarrow R(A)=R(B)$

相似: 有相同的特征多项式 ⇒ 有相同的特征值 ⇒ 有相同的行列式和迹 ⇒ 有相同的秩

$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$ 并不是 $\lambda E-A=\lambda E-B$

并不是相同的特征向量

此外, 还要注意:

A B相似 并不是两者都相似于同一个对角阵 还要都具有可对角化的条件

可对角化 ⟺ 有n个线性无关的特征向量 ⟸ 有n个不同的特征值

[重要] ⟺ 每个特征根的代数重数 = 几何重数

. 有相同的特征根且都可对角化 ⇒ 相似于同一对角阵 ⇒ 两矩阵相似

注: 代数重数 = $|A-\lambda I|=0$ 中 λ_i 的重数

几何重数 = $(A-\lambda I)x=0$ 中 $n-R(\lambda_i E-A)$

一般地, 属于不同特征值的特征向量线性无关

实对称矩阵, 属于不同特征值的特征向量…

bbs.kaoyan.com

浙江大学

③ 实对称矩阵必可对角化.

又∵实对称阵属于不同特征值的特征向量已经正交了.

故求某正交阵 Q 使 $Q^{-1}AQ=D$ 时. 只需对同个特征值下的

特征向量做正交单位化即可, 其他二做单位化

若求可逆阵 Q 使 $Q^{-1}AQ=D$ 不用做正交单位化了.

[注]: 规范正交的对象是线性无关的向量

(例如. 基的规范正交化, 基是线性无关的向量组)

规范正交的过程: 先正交化. 后单位化.

这一部分有点绕、多看课本. 认真体会

④ 二次型: 区分以下定义

<1> $x_1, x_2, \cdots x_n$ 的一个二次型是一个二次齐次多项式.

$$f(x_1, x_2, \cdots x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n$$
$$+ a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n + \cdots + a_{nn}x_n^2$$

二次型的矩阵表示 $= [x_1 x_2 \cdots x_n]^T A [x_1 x_2 \cdots x_n]$ $=\square\,[\,]$

A为 $x_1 x_2 \cdots x_n$ 的二次型矩阵, A为实对称矩阵

<2> 二次型 $f(x_1 x_2 \cdots x_n) = x^T A x$, 通过 $x = Cy$ 变换为标准型

$$f(y_1 y_2 \cdots y_n) = y^T D y = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

其中 C为 $C^TAC=D$, C为正交阵 D为对角阵.

将二次型变为标准型. 实质: 将二次型矩阵对角化

bbs kaoyan. con

考研论坛……考研人的精神家园

浙江大学

<3> 二次型的标准型有多种表示，但正方次系数中 +，-，0 个数不变

+ 的个数：正惯性指数

- 的个数：负惯性指数.

正惯性指数 - 负惯性指数 = 符号差

<4> 二次型 $f=X^TAX$ 正定 的充要条件

a) 对 $\forall X\neq 0$，$f=X^TAX>0$

b) 正惯性指数 $=n$

c) A合同于n阶单位阵：$\exists$ 可逆C，$C^TAC=E$

d) A的 n 个特征值全为正数 $\Rightarrow |A|>0$

e) $\exists$ 可逆B，$A=B^TB$

f) A的各阶顺序主子式全部大于0

<5> 二次型 $f=X^TAX$ 正定的必要条件

a) A主对角线元素 $a_{ii}>0$

b) $|A|>0$.

<6> 一般地，相似 ⇒ 有相同特征值.

有相同特征值且都可以对角化 ⇒ 相似

一个可对角化，另一个不可以 ⇒ 不相似

但，实对称阵必可对角化 ⇒ 实对称阵 相似 ⟺(充要) 有相同特征值

<7> 正定、合同（$B=C^TAC$）都是在实对称阵基础上才有的

合同 ⟺ 有相同的正负惯性指数 ⟸ 惯性定理

实对称阵：相似 ⟺ 有相同特征值

实对称阵：相似 ⇒ 合同，⇍

正定的首先条件：对称、可逆.

bbs.kaoyan.com

浙江大学

第三部分 | 特征值与二次型 | 例题分析

1. A为n阶实矩阵，P为n阶可逆阵，α是A关于λ的特征向量 则$(P^{-1}A^TP)^T$的属于λ的特征向量为（B）

A. $P^{-1}\alpha$　B. $P^T\alpha$　C. $P\alpha$　D. $(P^{-1})^T\alpha$

解：由题意，$A\alpha=\lambda\alpha$

而 $(P^{-1}A^TP)^T=P^TA(P^{-1})^T$

且 $P^TA(P^{-1})^T(P^T\alpha)=P^TA(P^{-1})^TP^T\alpha=P^TA\alpha=P^T\lambda\alpha=\lambda(P^T\alpha)$

故 B 正确.

2. 已知4阶阵A满足 $|3E+A|=0$，$AA^T=2E$　$|A|<0$，求A^*的一个特征值

解：考察 特征值的求法．解特征方程 $|A-\lambda E|=0$

$AA^*=|A|E$　$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$　$A^*=A^{-1}|A|$

A的特征值λ ⟹ A^{-1}特征值 $\frac{1}{\lambda}$ ⟹ A^*特征值 $\frac{|A|}{\lambda}$ ⟹ A^n特征值 λ^n

A的一个特征值为-3.

由 $AA^T=2E$ ⟹ $|A|^2=2^4$ ⟹ $|A|=-4<0$

∴ A^*的一个特征值$=\frac{|A|}{\lambda}=\frac{4}{3}$

3. 3阶矩阵A的逆矩阵的特征值为1，2，3，求A的代数余子式 $A_{11}+A_{22}+A_{33}=$ ___1___

解：考察．A^*的定义和组成元素，

$A_{11}+A_{22}+A_{33}$为A^*的迹 $=A^*$的特征值之和 $=\frac{|A|}{\lambda_1}+\frac{|A|}{\lambda_2}+\frac{|A|}{\lambda_3}$　(※)

A^{-1}的特征值为1，2，3 ⟹ $|A^{-1}|=1\times2\times3=6$ ⟹ $|A|=\frac{1}{6}$

⟹ A的特征值为 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$.

故 (※)$=\frac{1}{6}\times(1+\frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\frac{1}{3}})=1$

考研论坛····考研人的精神家园

4. A与B相似 A的特征值为$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$. 则$|B^{-1}-E|=24$

解：考察：相似 ⇒ 特征值相同　特征值$\begin{cases}之和=迹\\之积=行列式\end{cases}$

B的特征值为$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$ ⇒ B^{-1}的特征值2.3 4.5 ⇒ $B^{-1}-E$的特征值1 2.3 4

⇒ $|B^{-1}-E|=1\times2\times3\times4=24$.

5. A为2×2矩阵 $\alpha_1\alpha_2$是线性无关的2维向量 $A\alpha_1=0$, $A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$. 求A的特征值

解：$A(\alpha_1,\alpha_2)=(A\alpha_1,A\alpha_2)=(\alpha_1\alpha_2)\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}$

又$\alpha_1\alpha_2$线性无关. ∴ $[\alpha_1\alpha_2]$可逆.

故A与$\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}$相似 有着相同的特征值 = $\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}$特征值 = 0, 1

考察. 可逆的定义　相似的定义：∃可逆P　$P^{-1}AP=B$

相似矩阵有着相同的特征值

注：此题型很重要.

6. $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\x&4&y\\-3&-3&5\end{pmatrix}$ 已知A有3个线性无关的特征向量. λ=2是A的二重特征根

求P使满足$P^{-1}AP$可对角化.

←注：验证P的存在性

解：∵A有3个线性无关的特征向量. 故A可对角化

且特征根的代数重数 = 其几何重数

∴ $r(A-2E)=3-2=1$

解得 $\begin{cases}x=2\\y=-2\end{cases}$　代入A 解得另一个特征根为 λ=6

7. A, B为3阶阵. 若AB=A-B. $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$是A的3个不同的特征根

证. ① $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$都≠-1. ② ∃P 满足 $P^{-1}AP$. $P^{-1}BP$都为对角阵

bbs kaoyan. con

考研论坛····考研人的精神家园

浙江大学

证明. ① 若A有一个特征根为-1, 则 $|A+E|=0$, 即 $A+E$ 不可逆

而 $AB=A-B$ 得

$(A+E)B=A$

$\Rightarrow (A+E)B+E=A+E$

$\Rightarrow (A+E)(E-B)=E$

即存在 $E-B$ 为 $A+E$ 的逆矩阵 这与 $A+E$ 不可逆矛盾. 故 $\lambda_i\neq-1$ $i=1\ 2\ 3$

② ∵ $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ 是A的3个不同的特征根 故A可对角化

即∃可逆矩阵P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵

由 $AB=A-B$ 得 $A=(A+E)B$

∴ $P^{-1}AP=P^{-1}(A+E)BP$

$=P^{-1}(A+E)PP^{-1}BP$

∵ $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}$

∴ $P^{-1}(A+E)P=\begin{pmatrix}\lambda_1+1&&\\&\lambda_2+1&\\&&\lambda_3+1\end{pmatrix}$

∴ $P^{-1}BP=\begin{pmatrix}\frac{\lambda_1}{\lambda_1+1}&&\\&\frac{\lambda_2}{\lambda_2+1}&\\&&\frac{\lambda_3}{\lambda_3+1}\end{pmatrix}$ 得证

8 设A是3阶实对称阵 特征值为 1 1 -1 其中1的特征向量为 [illegible] 求A

解. (要点). 实对称 ⇒ 不同特征值的特征向量正交

设1的特征向量为 $(x_1\ x_2\ x_3)^T$.

则 $(x_1\ x_2\ x_3)(1,1,1)^T=0$

解方程 $x_1+x_2+x_3=0$ 得基础解系为 $\xi_2=$ [illegible] $\xi_3=$ [illegible]

∴ $k_2\xi_2+k_3\xi_3$ 为1的特征向量 [illegible]

则可逆阵 $P=(\xi_1\ \xi_2\ \xi_3)$ 使得 $P^{-1}AP=$ [illegible] ∴ $A=P($[illegible]$)P^{-1}$

bbs kaoyan con

浙江大学

9 设 $x=(1,1,2)^T$ 是 $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & a \\ 2 & a & b \end{pmatrix}$ 的特征向量，求 a b 的值，求所有特征向量

解：$Ax=\lambda x$ 即 $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & a \\ 2 & a & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=5 \\ a=2 \\ b=3 \end{cases}$

解 $|A-\lambda E|=0$ 得 $\lambda_2=\lambda_3=-3$

或 $\begin{cases} 5+0+3=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \\ \lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=|A| \end{cases}$ 也可得到 $\lambda_2=\lambda_3=\ldots$ 再求相对应的特征向量 省略

10. 设3阶实对称矩阵 A 的秩为2 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 是 A 的二重特征根

$\alpha_1=(1,1,0)^T$，$\alpha_2=(2,1,1)^T$ $\alpha_3=(-1,2,-3)^T$ 是 A 属于 6 的特征向量

求 A 的另一个特征根及其特征向量 e 和 A。

解：思考：秩 $<n \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow \prod\lambda_i=0 \rightarrow$ 0是其中一个特征根

① ∵ A的秩为2 ∴ $|A|=0$ 故0是其另一个特征根

取 $(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$ 的一个最大线性无关组 $\alpha_1\ \alpha_2$ 设与 $\lambda_3=0$ 对应的特征向量为 α

由于实对称矩阵属于不同特征值的特征向量必正交

∴ $\begin{cases} \alpha_1^T\alpha=0 \\ \alpha_2^T\alpha=0 \end{cases}$ 得 $\alpha=(-1,1,1)^T$ 为 $\lambda_3=0$ 的一个特征向量。

$k\alpha\ (k\neq0)$ 为 $\lambda_3=0$ 的特征向量。 > 注意 区别。

② $P=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$ $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 6 & & \\ & 6 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ $A=P\begin{pmatrix} 6 & & \\ & 6 & \\ & & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$

11. 设 A 为3阶矩阵，$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ 是线性无关的3维向量，且 $A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

$A\alpha_2=2\alpha_2+\alpha_3$，$A\alpha_3=2\alpha_2+3\alpha_3$

(I) 求B，使 $A(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)B$

(II) 求A的特征值

(III) 求可逆P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵

考研论坛----考研人的精神家园

浙江大学

解：(I) 由题意 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{bmatrix}$

∴ $B=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{bmatrix}$

(II) A与B相似（∵ $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 线性无关 $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$ 可逆）.

B的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=4$ 即为A的特征值

(III) $Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&4\end{pmatrix}$

设 $M=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$, $AM=BM$. $M^{-1}AM=B$. 左乘 Q^{-1}, 右乘 Q ⟹

$$Q^{-1}BQ=Q^{-1}M^{-1}AMQ=(MQ)^{-1}A(MQ)=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&4\end{pmatrix}$$

∴ $P=MQ$ 为所求.

12、设3阶实对称阵A各行元素之和为3, 向量 $\alpha_1=(-1,2,-1)^T$, $\alpha_2=(0,-1,1)^T$ 是 $AX=0$ 的两解.

(I) 求A的特征值与特征向量

(II) 求正交阵Q和对角阵Λ, 使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda$

(III) 求A及 $(A-\frac{3}{2}E)^6$

解：(I) A各行元素之和为3 ⟹ $\begin{cases}a_{11}+a_{12}+a_{13}=3\\a_{21}+a_{22}+a_{23}=3\\a_{31}+a_{32}+a_{33}=3\end{cases}$ ⟹ $A\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}=3\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

故 $\lambda_1=3$ 是A的一个特征值, $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 是其对应的一个特征向量.

$k_1\xi_1$ $(k_1\neq0)$ 是其对应的特征向量.

(II) 又 $\begin{cases}A\alpha_1=0\cdot\alpha_1\\A\alpha_2=0\cdot\alpha_2\end{cases}$ ∴ $\lambda_2=\lambda_3=0$ 是A的特征值. $\xi_2=\alpha_2$ $\xi_3=\alpha_3$ 是 $\lambda=0$ 的两个特征向量. $k_2\xi_2+k_3\xi_3$ (k_2k_3不全为0) 是 $\lambda_2=\lambda_3=0$ 对应的特征向量.

bbs kaoyan. con

考研论坛····考研人的精神家园

浙 江 大 学

(四) [illegible] 存在可逆阵 P 满足 $P^{-1}AP=\Lambda$，则 $P=(\xi_1\ \xi_2\ \xi_3)$

相似于正交阵 Q 满足 $Q^{-1}AQ=\Lambda$，则 $Q=(e_1\ e_2\ e_3)$

$e_1\ e_2\ e_3$ 是 $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$ 规范正交化后的结果

∵ A 为实对称阵 [illegible] 特征值的特征向量正交

∴ e_1 为 ξ_1 的单位化结果

$e_2\ e_3$ 为 $\xi_2\ \xi_3$ 单位正交化的结果

(Ⅱ) $A=Q\Lambda Q^{-1}$

$Q^{-1}(A-\frac{3}{2}E)Q$

$=Q^{-1}AQ-\frac{3}{2}E=\begin{pmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&&\\&\frac{3}{2}&\\&&\frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&&\\&-\frac{3}{2}&\\&&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

∴ $A-\frac{3}{2}E=Q\times\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&&\\&-\frac{3}{2}&\\&&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}Q^{-1}$

$(A-\frac{3}{2}E)^6=Q\times(\frac{3}{2})^6\times\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}Q^{-1}=(\frac{3}{2})^6E$

13. 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=-2$ 且 $\alpha_1=(1,-1,1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量。$B=A^5-4A^3+E$

(Ⅰ) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量，并求 B 的全部特征值及特征向量

(Ⅱ) 求 B.

解 (Ⅰ) 由题意得 B 的特征值分别为 [illegible]

∵ $A\alpha_1=\alpha_1$

$B\alpha_1=(A^5-4A^3+E)\alpha_1=\lambda^5\alpha_1-4\lambda^3\alpha_1+\alpha_1=-2\alpha_1$

∴ α_1 是 B 的一个特征向量，对应的特征值为 −2

当特征值为 1 时对应的特征向量为 [illegible]

又 ∵ A 为实对称阵 → B 为实对称阵

[illegible]

bbs kaoyan. con

考研论坛----考研人的精神家园

浙江大学

故 $k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$（k_2, k_3 不全为 0）是 1 对应的全部特征向量

$k_1\alpha_1$（$k_1\neq 0$）是 -2 对应的全部特征向量

(Ⅱ) $P=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$ $B=P\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$

14. 设 A 为 3 阶矩阵，α_1, α_2 分别为属于 -1、1 的特征向量，$A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$

(Ⅰ) 证明 $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ 线性无关

(Ⅱ) $P=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$ 求 $P^{-1}AP$.

解：(Ⅰ) 设存在 $k_1\ k_2\ k_3$ 满足 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$ ①

等式两边同时左乘 A 得 $k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+k_3A\alpha_3$

$=-k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_2+k_3\alpha_3$

$=-k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3(\alpha_2+\alpha_3)=0$ ②

联立 ① ② 两式得 $k_1=k_2=k_3=0$，故 $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ 线性无关

(Ⅱ) $A(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 即 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

15. 若 3 维列向量 α、β 满足 $\alpha^T\beta=2$，其中 α^T 为 α 转置，则 $\beta\alpha^T$ 的非 0 特征值为 __2__

解：$\beta\alpha^T\beta=2\beta$

2 解：设 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

$\beta\alpha^T$ 的秩为 1，只有 1 个非 0 特征值，2 个 0 特征值.

$\sum\lambda_i=x+0+0=$ 迹 $=b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3=\alpha^T\beta=2 \Rightarrow x=2$.

注：结论：$\beta\alpha^T$ 的一个特征值为 $\alpha^T\beta$，对应特征向量为 β，其余都为 0.

16. 设 $\alpha=(1,1,1)^T$，$\beta=(1,0,k)$，若矩阵 $\alpha\beta^T$ 相似于 $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 则 $k=$ __2__

解 1：$\alpha\beta^T=\begin{pmatrix}1&0&k\\1&0&k\\1&0&k\end{pmatrix}$. 相似矩阵 ⇒ 特征值相同 ⇒ 迹相同. $\therefore 1+k=3$ $k=2$

解 2：$\alpha\beta^T$ 的特征根 $\beta^T\alpha$, 0, 0. $\beta^T\alpha=1+k=3$ $\therefore k=2$

bbs.kaoyan.con

考研论坛——考研人的精神家园

浙江大学

17. $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 则A与B：合同且相似

解：考查：相似 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 有相同特征值

有相同特征值且均可对角化 ⇒ 相似.

一般来说，若两矩阵不相似 也有可能合同. 合同：有相同的秩，正惯性指数.

相似，合同都是等价. 等价 ⇔ $R(A)=R(B)$

实对称：相似 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 合同 . 合同肯定是在实对称基础上.

结论：A矩阵的结构，有n-1个为0的特征值. 1个非0特征值 = 迹 = 1+1+1+1 = 4

可以证明：

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix}1-\lambda&1&1&1\\1&1-\lambda&1&1\\1&1&1-\lambda&1\\1&1&1&1-\lambda\end{vmatrix} \xlongequal[\text{简化行列式}]{\text{第一部分：矩阵}} [1-\lambda+(4-1)\times1][1-\lambda-1]^{4-1}=\lambda^3(\lambda-4)=0$$

解得 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ ，$\lambda_4=4$. B的特征值也是如此.

B, A为实对称. 可对角化 ∴ A、B相似. ⇒ A、B合同.

若A、B有一个不可对角化. 但有相同特征值 ⇒ 合同 但不相似.

18. 已知，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+ax_2^2+ax_3^2-4x_2x_3$ 通过正交变换化成标准型

$f=y_1^2+2y_2^2+cy_3^2$. 求 a、c 及所做的正交变换.

解. 二次型 $f(x_1x_2x_3)$ 对应的二次型矩阵：$A=\begin{bmatrix}2&0&-2\\0&a&0\\-2&0&a\end{bmatrix}$.

由题意得 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=c$, 为A的特征值.

$$\therefore\begin{cases}2+a+a=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\\|A|=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3\end{cases} \Rightarrow\begin{cases}a=3\\c=5\end{cases} \quad \begin{cases}a=-1\\c=-3\end{cases}$$ 代入A得 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ 的特征向量.

正交变换 请略.

bbs.kaoyan.con

考研论坛----考研人的精神家园

19. 设 $D=\begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$ 为正定阵. $A_m^T=A$, $B_n^T=B$. $C_{m\times n}$

① 计算 P^TDP. 其中 $P=\begin{pmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ 0 & E_n \end{pmatrix}$

② 判断 $B-C^TA^{-1}C$ 是否为正定阵. 并证明结论.

解: $P^TDP=\begin{bmatrix} E_m & 0 \\ (-A^{-1}C)^T & E_n \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} A & C \\ C^T & B \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ 0 & E_n \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} E_m & 0 \\ -C^T(A^{-1})^T & E_n \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} A & C \\ C^T & B \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ 0 & E_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B-C^TA^{-1}C \end{bmatrix}$

$-C^T(A^{-1})^T = -C^TA^{-1}$

② ∵ P可逆, ∴ D与 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B-C^TA^{-1}C \end{bmatrix}$ 合同.

D正定 $\Rightarrow \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B-C^TA^{-1}C \end{bmatrix}$ 正定

D对称 $\Rightarrow \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B-C^TA^{-1}C \end{bmatrix}$ 对称 (而且 $(B-C^TA^{-1}C)^T=B^T-C^TA^{-1}C=B-C^TA^{-1}C$ 也能得出它对称)

$\forall Z=(\underbrace{0,\cdots 0}_{m个})^T$ 及 $Y=(\underbrace{y_1,y_2\cdots y_n}_{n个})^T\neq 0$

$(Z^T,Y^T)\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B-C^TA^{-1}C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z \\ Y \end{pmatrix}>0 \Rightarrow Y^T(B-C^TA^{-1}C)Y>0$

结论: 正定的条件首先是对称和可逆.

∵ 正定矩阵 ⇐ 正定二次型 ⇐ 二次型 ⇐ 对称阵.

20. A、B均正定, 证明: AB正定 ⇔ A与B可交换.

证: "⇒" AB正定, 则AB对称

$(AB)^T=AB=B^TA^T=BA$.

"⇐" A、B均正定, A、B可交换 得 $A^T=A$, $B^T=B$, $AB=BA$

bbs.kaoyan.con

考研论坛----考研人的精神家园

浙江大学

证明 AB正定:

① AB对称的证明.

$AB=BA=B^TA^T=(AB)^T$

② AB正定的证明:

设 $x\neq 0$, $(AB)x=\lambda x$

$ABx=\lambda x$

$Bx=\lambda A^{-1}x$

$x^TBx=\lambda x^TA^{-1}x>0$ B正定. A^{-1}正定 ∴ $\lambda>0$

∴ AB的所有特征值都>0. ∴正定.

21. 判断下列二次型是否为正定的

$$A_n=\begin{pmatrix} n & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n & \cdots & \\ -1 & -1 & \cdots & n \end{pmatrix}$$ 为 $f(x)=(n+1)\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2$ 的二次型矩阵.

解: A_n的前K阶子式的行列式

$|A_k|=[n+(k-1)\times(-1)](n+1)^{k-1}$ ⟵ 箭形行列式的公式

$=(n+1-k)(n+1)^{k-1}>0 \quad 1\leq n\leq k$

∴ A_n为正定阵. 二次型为正定二次型.

22. 结论: $\forall \vec{x}$, 若 $A\vec{x}=0$, 则 $A=0$

$\forall x$, 若 $x^TAx=0 \Leftrightarrow A^T=-A$
特别地, 若 $A=A^T$ (对称) $\Big\}\Rightarrow A=0$.

23. 等价 { 合同 ⟺ 有相同的秩, 相同的正惯性指数
相似 ⟹ 有相同的秩, 相同的特征值

实对称 { 合同 : $f(x)=x^TAx$ $\xrightarrow[\text{化为标准形}]{\text{经 } x=Cy \text{ 后}}$ $f(y)=y^T\underline{C^TAC}y=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots$ (其中 C^TAC 为对角阵 D)
正定

化为标准形, 即将实对称阵A对角化, 寻找正交阵C, 满足 $C^TAC=D$

bbs.kaoyan.com